# Normal sample mean

Monday, May 27, 2024 08:33

元元滴~出发！

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$ → 表示为 $x_1-\bar{x}$, $(x_2-\bar{x}),(x_3-\bar{x})$ ... $(x_n-\bar{x})$

$$= \frac{1}{n-1}\left[(x_1-\bar{x})^2 + \sum_{i=2}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right]$$ → $x_1-\bar{x}$ 可以用其余项表示

$$= \frac{1}{n-1}\left[\left(\sum_{i=2}^{n}(x_i-\bar{x})\right)^2 + \sum(x_i-\bar{x})^2\right]$$

$$\left[\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})}_{0} - \sum_{i=2}^{n}(x_i-\bar{x})\right]^2$$

WLOG, assume $\mu=0$, $\sigma^2=1$.

Joint PDF of $x_1, x_2 \dots x_n$:

$$f(x_1, x_2 \dots x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right\}$$

∴ let $y_1=\bar{x}$, $y_2=x_2-\bar{x}$ ... $y_n=x_n-\bar{x}$

$x_1 = y_1 - \sum y_j$ $x_2=y_2+\bar{x}$ ... $x_n = y_n+\bar{x}$

$y_1=\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\dots x_n)$

$y_1=\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\dots x_n)$

$ny_1 = x_1+x_2+\dots x_n$

为什么要凑 $x_j-\bar{x}$

因为 $y_j=x_j-\bar{x}$

$n y_1 - n\bar{x} = (x_1 - \bar{x}) + \sum_{j=2}^{n} (x_j - \bar{x}) \cdot 0$ 我们想找 $y_j$ PDF.

$\underbrace{n y_1 - n\bar{x}}_{0} = x_1 - \bar{x} + \sum (x_j - \bar{x})$ → 全部写成 $y$ 的形式

$y_1 = \bar{x}$ $\quad x_1 = \bar{x} - \sum_{j=2}^{n} (x_j - \bar{x})$

$$= y_1 - \sum_{j=2}^{n} y_j$$

$n$ 待补充

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(y_1 - \sum y_j)^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sum (y_j + y_1)^2} \quad |J|$$

这里是(n-1) 哭哭 检查100遍了.

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}[y_1^2 + (\sum y_j)^2 - 2y_1 \sum y_j + \sum y_j^2 + \overset{n-1}{\cancel{n}} y_1^2 + 2y_1 \sum y_j]} \quad n$$

$$e^{-\frac{1}{2}(\sum y_j^2 + (\sum y_j)^2)} \cdot e^{-\frac{1}{2}((n\cancel{-1}) \cdot y_1^2)}$$

$$= \left(\frac{n}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\frac{n^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{(n-1)/2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\sum y_j^2 + (\sum y_j)^2)}}_{②} \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{2} n y_1^2}}_{①}$$

这里是为了凑一个 $\bar{X}$ 的分布和一个 $s^2$ 的分布

$$= \underbrace{\left(\frac{n}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} n y_1^2}}_{①} \cdot \underbrace{\frac{n^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{(n-1)/2}} e^{-\frac{1}{2}(\sum y_i^2 + (\sum y_i)^2)}}_{②}$$

$\Rightarrow$ $y_1 = \bar{x}$, $y_j = x_j - \bar{x}$ $\perp$

思路总结：记 $\bar{X}$ & $\frac{1}{n-1}\Sigma(X_i-\bar{X})^2$ $\perp$.

$\Rightarrow$ 记 $\bar{X}$ 与 $\underbrace{(X_2-\bar{X}, X_3-\bar{X}, \dots X_n-\bar{X})}_{\text{因为 } S^2 \text{ 可以由 } \nearrow \text{ 表示}}$ $\perp$.

① $f_{\bar{X}, S^2} = f_{\bar{X}} \cdot f_{S^2}$

② tricks: WLOG, assume $X \sim N(0,1)$

③ Jacobian $= n$ $\Rightarrow$ 并不是很难

④ $x_1 = y_1 - \sum_{i=2}^{n} y_i$ ☆

试图 用 MGF 证明 $\bar{X}_n$ 与每个 i.e. $X_i - \bar{X}$ $\perp$.

则 $\bar{X}_n$ 与 $S_n^2$ (a fun. of $X_1-\bar{X}, X_2-\bar{X}, \dots X_n-\bar{X}$) $\perp$.

统计量

方法③ 用 covariance 证明，$U=\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ ，$V=\sum_{i=1}^{n} b_i X_i$

$U=\frac{1}{n}\sum X_i \ (\bar{X}) \longrightarrow$ 系数 $\frac{1}{n}$

$V=\sum_{i=1}^{n}(\delta_{ij}-\frac{1}{n})X_i \longrightarrow$ 系数 $\delta_{ij}-\frac{1}{n}$.

indicator if $i=j$ $\delta_{ij}=1$ ; 0 otherwise

$=\sum \delta_{ij} X_i - \underbrace{\sum \frac{1}{n} X_i}_{\bar{X}}$

$cov(U,V)=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}(\delta_{ij}-\frac{1}{n})\sigma_j^2$ WLOG, assume $X \sim N(0,1)$

$=0$